正標数の体上のDel Pezzo多様体

藤田, 隆夫

代数幾何学シンポジウム記録
1981年度 pp.37-53

正標数の体上のDel Pezzo多様体

東大教養 藤田隆夫

§0. 既知結果の復習

本稿では[F5]の結果をどうすれば正標数の場合に拡張できるかについて記す。まず，偏極多様体の△種数に関する基本的結果を[F7]に沿ってreviewする(以下体の標数は一般)。

射影的多様体 V とその上のample line bundle L との対 (V, L) を偏極多様体という。$n=\dim V$ に対し交点数 L^n を $d(V, L)$ と記す。(V, L) の△-種数を $\Delta(V, L) = n + d(V, L) - h^0(V, L)$ で定義する。V のdualizing sheaf ω_V に対して $(\omega_V + (n-1)L)L^{n-1} = 2g(V, L) - 2$ によって切断種数 $g(V, L)$ を定義する。

注意. ω_V は(少くとも余次元2以上の例外集合を除けば) torsion free だから上のようにして $g(V, L)$ はwell-defined。なお，Hilbert多項式 $\chi(V, tL)$ による d, g の定義([F1]参照)と上の定義が同値なことはすぐわかる。

定理 1. 任意の偏極多様体 (V, L) に対し $\Delta(V, L) > \dim Bs|L|$。特に, $\Delta(V, L) \geq 0$ であって, $\Delta = 0$ となるときは $Bs|L| = \emptyset$。

命題 2. (V, L) は偏極多様体, $Bs|L|$ は有限集合で, 任意の $p \in Bs|L|$ に於て V は非特異と仮定する。さらに $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) - 1$ ならば, V の部分多様体の列 $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \cdots \supset V_1$ で各 V_j は $|L|$ の V_{j+1} への制限の member であるようなもの (即ち [F2] の意味での ladder) が存在する。

定理 3. (V, L) は上の命題と同じ仮定を満たし, さらに $g(V, L) \geq \Delta(V, L)$ とする。このとき

a) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L)$ なら $Bs|L| = \emptyset$.

b) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) + 1$ なら $\bigoplus_{t\geq 0} H^0(V, tL)$ は $H^0(V, L)$ により生成される。特に L は very ample. さらに $g(V, L) = \Delta(V, L)$。

c) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) + 2$ なら $\bigoplus_{t\geq 0} H^0(V, tL)$ の relation ideal は 2 次式で生成される.

[F1] や [F2] にある議論を少し修正すれば上

の諸結果を一般標数で証明することができる。くわしくは[F7]参照。4年前の城崎での集まりで筆者が話したことでもある。さらに

補題4. 定理3-b)の条件のもとで
$H^q(V, tL) = 0$ for any $t \in \mathbb{Z}$, $0 < q < n = \dim V$.

証明には[F3;(2.1)]を用いる。小平型消滅定理の代用としてこの補題は技術的には重要。

さて，以上の準備のもとに $\Delta(V, L) = 0$ となる偏極多様体については，まず定理1.で $|L|$ が底点をもたず，命題2より ladder が存在し，従って $g(V, L) = h^1(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \geqq 0$ がわかり，故に定理3，b)が適用できる。かくてLが very ample とわかってしまえばあとは古典的にもよく知られた議論で標数に関係なく次の結果が得られる。

定理5. (V, L) は $\Delta = 0$ なる偏極多様体とする。上述のようにLは very ample だから，$|L|$ によりVを $\mathbb{P}^N$ $(N = \dim |L|)$ に埋めこんでおく。するとVはその linear section として得られる非特異部分多様体Mを底とする cone（頂点集合

は点とは限らずある線型空間）になる。さらにこの M は $\Delta(M, L_M)=0$ をみたし，次の内どれかの型になる。（注：V が cone でなければ M＝V とみなすことに規約する）。

i) $(M, L_M) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ ． $d=1$ ．

ii) M は 2 次超曲面。 $d=2$.

iii) $(M, L_M) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ ． $d=4$ ．

iV) M は rational scroll。即ち，$\mathbb{P}^1$ 上の ample vector bundle E で，$(M, L_M) \cong (\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1))$ となるものが存在する。

さて，本稿の主題となる $\Delta=1$ の場合であるが，以下では V が非特異な多様体 M であると仮定する。定理 1 より $Bs|L|$ は高々有限，そこで命題 2 より ladder が存在する。もしも $g(M, L)=0$ ならば $h^1(V_1, \mathcal{O})=g(M, L)=0$，即ち $V_1 \cong \mathbb{P}^1$，これより $\Delta(M, L)=0$ が出てくる（くわしくは [F7] 参照。標数零なら消滅定理の簡単な応用）。そこで $g(M, L) \geqq 1$ とわかる。故に定理 3 より L が very ample $\Leftrightarrow d(M, L) \geqq 3$ と結論できる。さらにこのとき $g(M, L)=1$.

定義6．　$\Delta(M,L)=g(M,L)=1$ となる偏極多様体 (M,L) を Del Pezzo 多様体と呼ぶ．

定理7．偏極多様体 (M,L) に対し次は同値．

イ）　$\Delta=g=1$，即ち (M,L) は Del Pezzo．

ロ）　M の canonical bundle K_M は $(1-n)L$（ここで $n=\dim M$）に線型同値であり，$H^p(M,tL)=0$ for any $t\in\mathbb{Z}$，$0<p<n$．

この証明は [F5]（標数零），[F7]（標数一般）にある。いずれにせよ少しゴタゴタするので省略する。

ともあれ，定理3の b), c) により

定理8．　$d=3$ の Del Pezzo 多様体は3次超曲面。$d=4$ のものは2つの2次超曲面の完全交叉になる。

$d\geqq 5$ の場合については次が知られている。

定理9．（標数一般）．$n=\dim M=2$ のとき，（$d\leqq 4$ でも）Del Pezzo surface M は $M\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の場合を除けば $\mathbb{P}^2$ より $9-d$ 個の点を blow-up することにより得られる。従って特に $d\leqq 9$。

定理10（標数零，[F5]&[F6]参照）．$n\geqq 3$，

$d \geq 5$ の Del Pezzo 多様体は次の内どれか。

i) $d=8$, $(M, L) \cong (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))$.

ii) $d=7$, M は $\mathbb{P}^3$ の 1 点 blow-up.

iii) $d=6$, M は Segre variety $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$.

iv) $d=6$, M は iii) の超平面切断。このとき M は $\mathbb{P}^2$ の tangent bundle に付随した $\mathbb{P}^1$-bundle になる。

v) $d=6$, M は Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$。

vi) $d=5$, M は Grassmann 多様体 $Gr(5,2) \subset \mathbb{P}^9$ の linear section として得られる。

特に、$d \geq 9$ のものは存在しない。

標数の仮定がどのように使われるか見るため、$d \geq 9$ のものが存在しないことを証明してみよう。(M, L) を $d \geq 9$ の Del Pezzo 3-fold とする。L は very ample だから、$|L|$ の一般のメンバー S は非特異，そして Del Pezzo surface. よって定理 9 より $S \cong \mathbb{P}^2$, $d=9$, $L_S = -K_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. 一方 Lefschetz の定理より $Pic(M) \to Pic(S)$ の余核は標数に素な torsion をもたない。故に $H \in Pic(M)$ で $H_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ となるものがある。上の制限写像は単射なので $L = 3H$ in $Pic(M)$。そこで

$9=d=L^3=(3H)^3=27H^3$，しかし $H^3\in\mathbb{Z}$ だから矛盾。

注意．実は，上述のようなことが起こり得ないことは，Tango［T］により全く別の方法で標数3の場合もこめて示されている。

さて，$d\leq 8$ の場合にも，鍵となるのは $n=3$，S が $|L|$ の一般のメンバー，としたときの制限写像 $\mathrm{Pic}(M)\longrightarrow\mathrm{Pic}(S)$ の状態の吟味であった（cf.［F5］）。それは Deligne による不変 cycle 定理（これは彼の Hodge 構造理論の一応用）が主役となるものであった。

最近 Bădescu が $d=9,8$ の場合に正標数での Del Pezzo 多様体を標数零のものに lift することによって定理10を（部分的ながら）一般標数に拡張することに成功した。彼の方法は少し改良を加えることによって $d=7,6,5$ でも役立つことが判明したので，ここでそれを報告することにする。現在，定理10は $d=5$ の場合を除き一般標数で証明されている。

§1. Liftability

kが標数$p>0$の代数閉体のとき，$A(k)$でその Witt vector の環を表わす。$A(k)$の定義は省くが，これは標数零の完備離散付値環であり，極大イデアルはpで生成され，剰余体はkに一致することを記しておく。

定義。非特異射影多様体Mとその上のample divisor Dとの対(M, D)を以下 Lefschetz pair と呼ぶ。k上の Lefschetz pair (M, D)に対し，$\mathrm{Spec}(A(k))$上 smooth な scheme $\mathcal{M}$とその上の因子$\mathcal{D}$で，$(\mathcal{M}, \mathcal{D})$を closed point $=\mathrm{Spec}(k)$上に制限したときちょうど(M, D)と同型になるようなものを，(M, D)の$\mathrm{Spec}(A(k))$への *lift* と呼ぶ。Dが ample だから，$\mathcal{D}$は相対 ample。従って，$(\mathcal{M}, \mathcal{D})$を$\mathrm{Spec}(A(k))$の generic point 上に制限することにより標数零の Lefschetz pair (M', D')が得られる。これを(M, D)の標数零への *lift* と呼ぶ。上の意味での *lift* $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$が存在するとき，$(M, D)$は *liftable* という。

定義。(M, D)が Lefschetz pair のとき，Θ_Mで

M上のベクトル場の層を表わす。これは$\mathcal{O}_M$のderivationの層とみなせるから，$\mathcal{I}$をDの定義イデアルとしたとき，自然な写像$\Theta_M \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \mathcal{O}_M/\mathcal{I})$が定まる。この核を$\Theta_M(\log D)$，又は$\Theta(M, D)$で表わす。Dの特異性が高々normal crossing型のとき，$\Theta(M, D)$は局所自由であり，対数的一次型式の層$\Omega_M(\log D)$の双対層になる。ともあれ，この定義より$\Theta(M, D)$はMの（localな）infinitesimal automorphismでDを保つもののなす層とみなせる。

定理11。（M, D）はLefschetz pair，さらに$H^2(M, \Theta(M, D)) = 0$と仮定する。このとき（M, D）はliftable。

略証。Dはampleだから，formalにliftできればそれは自動的にalgebraizableである。一方，formalにliftできることは[SGA 1]，Exposé IIIの方法をまねればすぐ示せる。Mがsmoothなので（M, D）はlocalにはSpec(A(k))におけるinfinitesimal nbdsにuniqueにliftできる。

そうしたliftの全体がはりあわされて(M, D)のglobalなliftをあたえるためのobstructionが$H^2(M, \Theta(M, D))$に現れる、という仕掛である。

さて、$(\mathcal{M}, \mathcal{D})$が$(M, D)$の$\mathrm{Spec}(A(k))$へのliftで、generic fiberが$(M', D')$だとする。

補題12. 制限写像u: $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Pic}(M')$はbijective。

証. $\mathcal{M}$のopen subscheme $\mathcal{U} = \mathcal{M} - M$に対して$\mathrm{Pic}(M') \cong \mathrm{Pic}(\mathcal{U})$。$M$は$\mathcal{M}$上のCartier divisorでその定義ideal $p\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$は$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$に同型だから、$u$は単射である。$\mathcal{M}$が$\mathrm{Spec}(A(k))$上非特異だから、$\mathrm{Pic}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{U})$、従って$u$が全射となる。

注意. Dが非特異なら、$\mathrm{Pic}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(D')$。

補題13. $H^1(M, \Theta_M) = H^2(M, \Theta_M) = 0$ならば、制限写像$r$: $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Pic}(M)$はbijective.

証明。$\hat{\mathcal{M}}$をMに沿っての$\mathcal{M}$のformal completionとする。$\mathrm{Pic}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\hat{\mathcal{M}})$は容易。また、補題の仮定を用いて$\mathrm{Pic}(\hat{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(M)$も示せる。

§2. Del Pezzo 3-folds

補題14．(S, L)はDel Pezzo曲面で$d \geqq 5$とする。このとき $H^1(S, \Theta_S[tL]) = 0$ for $^\forall t \geqq 0$。

証明．tに関する帰納法による。まず$t=0$の場合を考える。$S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$なら明らかだから，Sは$\mathbb{P}^2$より$9-d$個の点をblow-upして得られるとしてよい（定理9）。$-K_S$がampleだから，これらの点は一般の位置にある。従って容易な考察により $H^1(S, \Theta_S) = 0$。

$t>0$の場合を考えるため，$|L|$の一般のメンバーCをとる。Cは非特異楕円曲線である。そこで，完全列 $0 \to \Theta_C \to \Theta_S|_C \to \mathcal{O}_C[L] \to 0$ を用い，$H^1(C, \Theta_S|_C[tL]) = 0$がすべての正数tに対し言える。次に，完全列

$$0 \longrightarrow \Theta_S[(t-1)L] \longrightarrow \Theta_S[tL] \longrightarrow \Theta_S|_C[tL] \longrightarrow 0$$

を用いて，$H^1(S, \Theta_S[(t-1)L]) = H^1(C, \Theta_S|_C[tL]) = 0$なら$H^1(S, \Theta_S[tL]) = 0$であることがわかる。よってtに関する帰納法で補題が示せる。

注意．$d<5$だと $H^1(S, \Theta_S) \neq 0$。

以下では(M, L)はDel Pezzo 3-fold，$d \geqq 5$，Sは$|L|$の一般のメンバーとする。

補題 15. $H^2(M, \Theta_M)=0$.

証明。完全列 $0 \to \Theta_S \to \Theta_M|_S \to \mathcal{O}_S[L] \to 0$ に補題14及び定理7, ロ) を適用して $H^1(S, \Theta_M|_S[tL])=0$ for $\forall t \geqq 0$ を得る。一方，完全列

$$0 \longrightarrow \Theta_M[(t-1)L] \longrightarrow \Theta_M[tL] \longrightarrow \Theta_M|_S[tL] \longrightarrow 0$$

より $H^1(S, \Theta_M|_S[tL]) \longrightarrow H^2(M, \Theta_M[(t-1)L]) \to H^2(M, \Theta_M[tL])$ が完全。そこで $h^2(M, \Theta_M[(t-1)L]) \leqq h^2(M, \Theta_M[tL])$ for $t \geqq 0$。よって $h^2(M, \Theta_M) \leqq h^2(M, \Theta_M[L]) \leqq \cdots \leqq h^2(M, \Theta_M[\ell L])$ for $\ell \gg 0$ だが，Serreの定理より最後の項は消える。故に $H^2(M, \Theta_M)=0$.

命題 16。Lefschetz pair (M, S) は liftable。

証明。Sは非特異だから，次の完全列が存在する：$0 \longrightarrow \Theta(M,S) \longrightarrow \Theta_M \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$，ここで $\mathcal{N}$ は S の M における normal sheaf，よって $\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_S[L]$。これに付随する長完全列を考え，補題15と定理7, ロ) を適用すれば $H^2(M, \Theta(M,S))=0$ がわかる。故に定理11が使える。

系 17. $d \leqq 8$.

実際，(M, S) の標数零への lift (M', S') を考えると，$d(M', S')=d(M, S)$ で (M', S') は

Del Pezzo 3-fold になっていることが容易にわかる。

さて，補題12及び補題13の帰結として，制限写像 $\mathrm{Pic}(M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$ の像のありさまは標数零への lift (M', S') によって決まる。それから先の議論は標数零のときと大差なく，結局定理10が $d \geq 6$ の場合には一般標数に拡張できることになるのだが，詳細は省略して一，二例を示すにとどめよう。$L' = [S'] \in \mathrm{Pic}(M')$ とする。

例1) $d=8$ のとき。$(M', L') \cong (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))$。そこで，$H \in \mathrm{Pic}(M)$ で $L = 2H$ in $\mathrm{Pic}(M)$ となるものが存在する。$L_S = -K_S$ であるから，(S, H_S) は Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ (これは同時に2次曲面でもある) でなければならない。そこで [F3; (3.8)] の議論より $(M, H) \cong (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1))$ とわかる ($h^0(M, H) = 4$ を示せば十分)。

例2) $d = 6$, $(M', L') \cong (\mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta \times \mathbb{P}^1_\gamma, H_\alpha + H_\beta + H_\gamma)$ のとき。

S は，S' 同様に，$\mathbb{P}^2$ 上の一般の位置にある3点 P_1, P_2, P_3 を blow up して得られる。$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$

の pull back を H, P_i 上の例外曲線を E_i で表わすことにすれば，補題12及び13より M 上の line bundles H_α, H_β, H_γ でその S への制限がそれぞれ $H-E_1$, $H-E_2$, $H-E_3$ であるようなものが存在する。$|[H-E_i]_S|$ は S より $\mathbb{P}^1$ への全射を定め，その一般のファイバーは $\mathbb{P}^1$ になることに注意する。そこで，[F3;(2.8)]の方法により，これらは $|H_\alpha|$, $|H_\beta|$, $|H_\gamma|$ の定める有理写像として M から $\mathbb{P}^1$ への正則写像に拡張できる。まとめて $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta \times \mathbb{P}^1_\gamma$ が得られ，$L = \varphi^*(H_\alpha + H_\beta + H_\gamma)$ となる。$(H_\alpha + H_\beta + H_\gamma)^3 = 6 = L^3$ だから，$\deg \varphi = 1$，即ち φ は双有理写像である。他方 L が ample だから φ は finite。故に，Zariski Main Theorem により φ は同型写像でなければならない。

(M', L') が他の型のときも (M, L) は (M', L') と同じ型の Del Pezzo 3-fold になることがわかる。

注意．$d=5$ のときは $\mathrm{Pic}(M)$ が L により生成されることがわかるが，[F6]での議論を一

般標数に移すには不十分である。途中で小平-Ramanujam の消滅定理を使うからであるが，しかしこの困難は多分近い将来克服できるであろう。ともかく

定理18. $d \geq 6$ なら，定理10は一般標数で成立つ。

$n=3$ のときは今まで説明したようにできる。$n \geq 4$ のときは，D を $|L|$ の一般のメンバーとすれば，Lefschetz の定理（例えば[H]参照）により $Pic(M) \cong Pic(D)$ なので，[F5]にある議論をまねすればよい。

最後に，本題とはあまり関係ないが，問題を一つ出しておこう。

問。$-K_M$ が ample な多様体は liftable か？.

動機。Serre duality より $h^2(M, \Theta_M) = h^{n-2}(M, \Omega^1_M[K])$ もし中野型消滅定理が成立てばこの右辺は0. さて $H^2(M, \Theta_M) = 0$ なら formal には liftable だが，K_M がその上の line bundle として拡がるので formal lift は algebraizable であろう。

参考文献

[B] L. Bădescu ; On ample divisors, preprint series in math. 17 (1980), I.N.C.R.E.S.T., Bucharest, 1980

[F1] T. Fujita ; On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 22 (1975), 103 − 115.

[F2] ——— ; Defining equations for certain types of polarized varieties, Complex Analysis and Algebraic Geometry, p.p. 165 − 173, Iwanami, 1977

[F3] ——— ; On the hyperplane section principle of Lefschetz, J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 153−169.

[F4] ——— ; 偏極多様体の分類と構造 ——Δ種数の理論, 代数幾何学シンポジウム(於城崎)報告集, 1977

[F5] ——— ; On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 709 − 725.

[F6] ——— ; ibid, part II, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 415 − 434

[F7] ——— ; On polarized varieties of small Δ-genera, to appear.

[H] R. Hartshorne; Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer

[SGA 1] A. Grothendieck; Revetements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Math. 221, Springer

[T] H. Tango; On a criterion of a projective space, Bull. Kyoto Univ. of Education, Ser. B, 47 (1975) 1-11.